**例題 4　内積の演算となす角**

$|\vec{a}|:|\vec{b}|=1:\sqrt{3}$，$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-2\vec{b}|$ のとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角 $\theta$ を求めよ．

**解**　$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}-2\vec{b}|^2$ より，$|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$

これより，$6\vec{a}\cdot\vec{b}=3|\vec{b}|^2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}|\vec{b}|^2$ …①　また，$|\vec{a}|=\dfrac{1}{\sqrt{3}}|\vec{b}|$ …②

よって，①，②より，$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{1}{2}|\vec{b}|^2\div\dfrac{1}{\sqrt{3}}|\vec{b}|^2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　ゆえに，$\boldsymbol{\theta=30°}$

**17**　次の問いに答えよ．

(1)　$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，$|2\vec{a}+3\vec{b}|=6$ のとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角 $\theta$ を求めよ．

(2)　$|\vec{a}|:|\vec{b}|=1:3$，$|2\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$ のとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角 $\theta$ を求めよ．

(3)　$|\vec{a}|=|\vec{b}|$，$|\vec{a}-\vec{b}|=|2\vec{a}+\vec{b}|$ のとき，$\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{a}-2\vec{b}$ のなす角の余弦を求めよ．

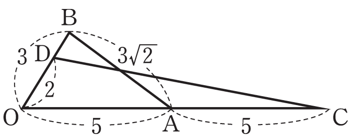
**18**　$|\vec{x}-2\vec{y}|=1$，$|\vec{x}-\vec{y}|=1$ で，$\vec{x}-2\vec{y}$ と $\vec{x}-\vec{y}$ が垂直である．次の問いに答えよ．

(1)　$|\vec{x}|$，$|\vec{y}|$ の値を求めよ．

(2)　$\vec{x}$，$\vec{y}$ のなす角を $\theta$ とするとき，$\cos\theta$の値を求めよ．

**19**　OA＝5，OB＝3，AB＝$3\sqrt{2}$ の△OABがあり，点C，Dを右の図のようにとる．次の内積を求めよ．

(1)　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$　　(2)　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$




**問 題 C**

**20**　放物線 $y=(x-a)^2$ と直線 $y=\dfrac{1}{a}x$ の交点をP，Qとし，A$(a,\ 0)$とする．このとき，$\overrightarrow{AP}$ と $\overrightarrow{AQ}$ は垂直になることを示せ．

**21**　△ABCで，$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=a$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=b$，$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=c$ とおく．次の問いに答えよ．

(1)　$(a-b)(b-c)(c-a)=0$ のとき，△ABCはどんな三角形か．

(2)　△ABCの面積 $S$ は，$S=\dfrac{1}{2}\sqrt{ab+bc+ca}$ であることを証明せよ．

**22**　平面上に中心$O_1$，半径 $a\,(0<a<2)$ の円 $C_1$ と，中心$O_2$，半径 2 の円 $C_2$ があり，$C_2$ は点$O_1$を通り，$C_1$ と $C_2$ は 2 点A，Bで交わっている．$\overrightarrow{O_2A}\cdot\overrightarrow{O_2B}=-\dfrac{7}{8}$ のとき $a$ の値を求めよ．

●**ヒント**

**20**　交点P，Qの $x$ 座標をそれぞれ $x_1$，$x_2$ として，解と係数の関係を利用する．

**21**　(2)　$\overrightarrow{AB}=\vec{x}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{y}$ として，$|\vec{x}|$，$|\vec{y}|$，$\vec{x}\cdot\vec{y}$ を $a$，$b$，$c$ を用いて表す．