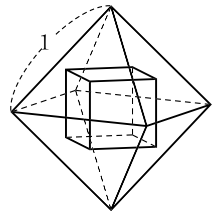
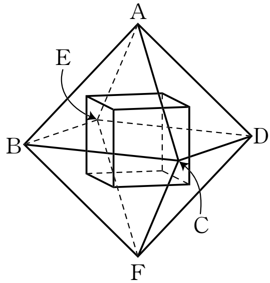
8 右の図のように，正八面体の各面の重心を結んで，正八面体の内側に正六面体をつくる。正八面体の１辺の長さが１のとき，正六面体の体積を求めよ。



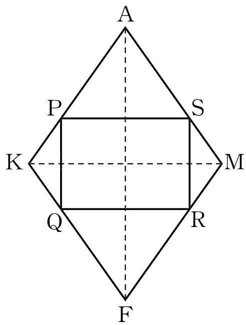
考え方　右の図において，辺BC，CD，DE，EBの中点をそれぞれK，L，M，Nとし，点A，K，F，Mを通る平面で切断したときの切断面を考える。



解 答　右の図の正八面体において，辺BC，CD，DE，EBの中点をそれぞれK，L，M，Nとし，点A，K，F，Mを通る平面で切断すると，右下の図のようになる。

AK＝KF＝FM＝MAより，四角形AKFMはひし形で

$KM=1,\ AF=\sqrt{2}$



線分AK，KF，FM，MA上にある正六面体の頂点をそれぞれP，Q，R，Sとすると，正六面体の１辺の長さは線分PQの長さに等しい。ここで，P，Qはそれぞれ△ABC，△FBCの重心であるから

$AP : PK = 2 : 1 \qquad FQ : QK = 2 : 1$

よって，△AKFにおいて三角形と比の定理より

$PQ : AF = KP : KA = 1 : 3$

したがって　$PQ=\dfrac{1}{3}AF=\dfrac{1}{3}\times\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

ゆえに，正六面体の体積は

$\dfrac{\sqrt{2}}{3}\times\dfrac{\sqrt{2}}{3}\times\dfrac{\sqrt{2}}{3}=\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{2}}{27}}$

別 解　辺AB，AC，AD，AEを2：1に内分する点をG，H，I，Jとすると，四角形GHIJは正方形で，その１辺の長さは，三角形と比の定理により

$GH : BC = AG : AB = 2 : 3$